Προτεινόμενα Θέματα

Μαθηματικά – Γ' Λυκείου

2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι και μέγιστη τιμή της f.

β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

δ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση. Τότε ισχύει $f'(0)=0$.

ε) Ισχύει $\ln x<x-1 \Leftrightarrow 0<x\neq 1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\cdot e^x,\qquad x\neq -1$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, ισχύει $f(x)\cdot f(-x)=1$

Μονάδες 6

β) Η εξίσωση $f(x)=1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, που είναι αντίθετες.

Μονάδες 6

Β3. Δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις:

- $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και
- $h(x) = \ln x \, , x > 0$.

Αν η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $A\big(a, g(a)\big)$, όπου $|a| \neq 1$, ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_h στο σημείο $B\big(\beta, h(\beta)\big)$, με $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός a είναι ρίζα της εξίσωσης $(x+1) \cdot e^{-x} = x - 1$, και να συμπεράνετε ότι οι C_g και C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln(x-1) - 1, \qquad x > 1 \, .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \ln(x-1) \, , x > 1$

Μονάδες 4

β) Υπάρχει μοναδικό σημείο $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ της C_f, με $x_0 \in (2,3)$, το οποίο είναι το πλησιέστερο σημείο της C_f στο σημείο $A(0,3)$.

Μονάδες 5

γ) Ισχύει: $(AM) = x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 2 \cdot x_0 + 2}$

Μονάδες 5

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο M, είναι κάθετη στην ευθεία AM.

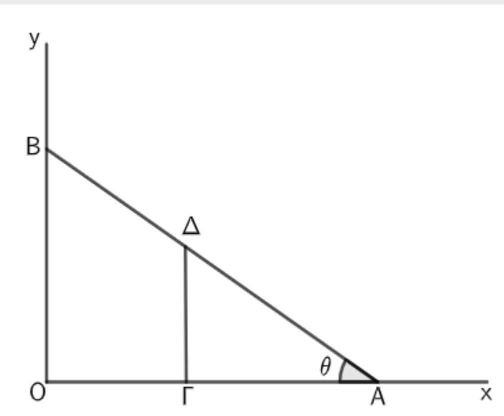
Μονάδες 4

Γ2. Ένα σημείο $N\big(a, f(a)\big)$ κινείται στην C_f ξεκινώντας από το σημείο $B(2,0)$, και για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ ισχύει $a'(t) = 2$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_0, που η εφαπτομένη της C_f στο N, διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,0)$, και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω, που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$, την χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ μήκους $1m$ με μήκος της απόστασης $O\Gamma$ να είναι $3\sqrt{3}m$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu\ \theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\theta) = 10$ έχει δύο ρίζες στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Στη συνέχεια να θεωρήσετε γνωστό ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε ισχύουν:

Δ3. $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(\alpha) + f(\beta), x \in [\alpha, \beta]$

Μονάδες 6

Δ4. $(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

Μονάδες 6

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 106

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 32

Α3.

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.

Α4.

- **α)** Λάθος
- **β)** Λάθος
- **γ)** Σωστό
- **δ)** Σωστό
- **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \neq -1$, είναι: $f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x > 0$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

Β2.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ ισχύει:

$$f(x) \cdot f(-x) = \left[\frac{x-1}{x+1} \cdot e^x\right] \cdot \left[\frac{-x-1}{-x+1} \cdot e^{-x}\right] = \left[\frac{x-1}{x+1} \cdot e^x\right] \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \cdot e^{-x}\right] = 1$$

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ και άρα

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to-1^-} f(x)\right) = (0, +\infty)$$

όπου περιέχεται το $y = 1$, οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει $f(x_1) = 1$.Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-1, +\infty)$ και άρα: $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to-1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

όπου περιέχεται το $y = 1$, οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει $f(x_2) = 1$.

Τελικά, εξασφαλίσαμε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, x_1 και x_2, με $x_1 < -1 < x_2$.

Ισχύει $f(1) = 0$, και άρα $f(1) < f(x_2)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, θα είναι $x_2 > 1$, και άρα $-x_2 < -1$ με $f(-x_2) = \frac{1}{f(x_2)} = 1$, οπότε το $-x_2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 1$ στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, και άρα

$-x_2 = x_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(\alpha, g(\alpha))$ είναι:

$$y - g(a) = g'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = e^a x + e^a - ae^a$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο $B(\beta, h(\beta))$ είναι:

$$y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\beta}x + \ln\beta - 1$$

Λόγω ταύτισης έχουμε:

$$\begin{cases} e^a = \dfrac{1}{\beta} \\ e^a - ae^a = \ln\beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln\beta \\ e^a - ae^a = -a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln\beta \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\ln\beta \\ f(a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = e^{-x_1} \\ \alpha = x_1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta = e^{-x_2} \\ a = x_2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α) Έστω $\varphi(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x + 1 > 0$ και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, και $1-1$. Για κάθε $x > 1$ ισχύει:
$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln(x-1) - 1 \Leftrightarrow \varphi\big(f(x)\big) = \varphi(\ln(x-1)) \Leftrightarrow f(x) = \ln(x-1)$

β) Έστω $M\big(x, f(x)\big)$ με $x > 1$ τυχαίο σημείο της C_f. Είναι:

$$(AM) = \sqrt{x^2 + [\ln(x-1) - 3]^2} = d(x), x > 1$$

Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^2 + [\ln(x-1) - 3]^2, x > 1$$

Για κάθε $x > 1$:

$$g'(x) = 2x + \frac{2[\ln(x-1) - 3]}{x-1} = 2 \cdot \frac{x^2 - x + \ln(x-1) - 3}{x-1}$$

και έστω:

$$h(x) = x^2 - x + \ln(x-1) - 3, x > 1$$

Για $x > 1$:

$h'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-1} > 0$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (1, +\infty)$ και άρα

$$\mathrm{h}(\Delta) = \left(\lim_{x\to 1^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

όπου περιέχεται και το 0. Άρα, υπάρχει $x_0 \in \Delta$, και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$.

- $x < x_0 \Leftrightarrow h(x) < h(x_0) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$
- $x > x_0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

Τελικά, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων της g:

x	1	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Επιπλέον, έχουμε: $h(2) = -1 < 0, h(x_0) = 0$
και $h(3) = 3 + \ln 2 > 0$, οπότε $h(2) < h(x_0) < h(3)$, και αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, είναι τελικά $2 < x_0 < 3$.

γ) Έχουμε εξασφαλίσει ότι η απόσταση: $d(x) = \sqrt{g(x)}, x > 1$ γίνεται ελάχιστη για $x = x_0$ και

$$d(x_0) = \sqrt{g(x_0)} = \sqrt{x_0^2 + [\ln(x_0 - 1) - 3]^2} \quad (1)$$

Είναι όμως:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + \ln(x_0 - 1) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0 - 1) - 3 = x_0 - x_0^2 \ \ (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$d(x_0)=\sqrt{x_0^2+(x-x_0^2)^2}=\sqrt{x_0^4-2x_0^3+2x_0^2}=\sqrt{x_0^2(x_0^2-2x_0+2)}=x_0\sqrt{x_0^2-2x_0+2}$$

δ) Για κάθε $x>1, f'(x)=\frac{1}{x-1}$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ έχει κλίση τον αριθμό

$$\lambda_1=f'(x_0)=\frac{1}{x_0-1}.$$

Η ευθεία AM έχει κλίση τον αριθμό

$$\lambda_2=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{f(x_0)-3}{x_0}=\frac{\ln(x_0-1)-3}{x_0}=\frac{(x_0-x_0^2)}{x_0}=\frac{x_0(1-x_0)}{x_0}=1-x_0$$

Τελικά είναι $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ και προκύπτει η ζητούμενη καθετότητα.

Γ2. Είναι: $\alpha'(t)=2\Leftrightarrow a(t)=2t+c$ και αφού είναι $\alpha(0)=2\Leftrightarrow c=2$, και άρα $a(t)=2t+2$. Τελικά είναι $N(2t+2,\ln(2t+1))$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο N είναι:

$$y-\ln(2t+1)=f'(2t+2)(y-2t-2)\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{(2t+1)}x+\ln(2t+1)-\frac{2t+2}{2t+1}$$

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το $\Gamma(1,0)$ ισχύει:

$$0=\frac{1}{(2t+1)}+\ln(2t+1)-\frac{2t+2}{2t+1}\Leftrightarrow\ln(2t+1)-1=0\Leftrightarrow 2t+1=e\Leftrightarrow t=\frac{e-1}{2}$$

Για την γωνία ω, που η εφαπτομένη αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{1}{2t+1}$$

και άρα:

$$[1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)]\cdot\omega'(t)=-\frac{2}{(2t+1)^2}$$

και για την χρονική στιγμή $t_0=\frac{e-1}{2}$, ισχύει:

$$[1+\varepsilon\varphi^2(t_0)]\cdot\omega'(t_0)=-\frac{2}{(2t_0+1)^2}=-\frac{2}{e^2}$$

Επιπλέον, έχουμε:

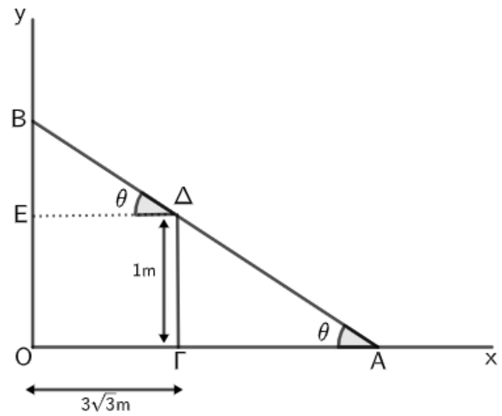
$$\varepsilon\varphi(t_0)=\frac{1}{2t_0+1}=\frac{1}{e}$$

και τελικά είναι:

$$\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\cdot\omega'(t_0)=-\frac{2}{e^2}\Leftrightarrow\omega'(t_0)=-\frac{2}{e^2+1}\ rad/\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΑΔ$ ισχύει: $ημθ = \frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{1}{ημθ}$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΔΒ$ ισχύει: $συνθ = \frac{ΔΕ}{ΒΔ} \Leftrightarrow ΒΔ = \frac{3\sqrt{3}}{συνθ}$

Άρα, $ΑΒ = ΑΔ + ΒΔ = \frac{1}{ημθ} + \frac{3\sqrt{3}}{συνθ} = f(θ), θ \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ2. Για κάθε $θ \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(θ) = -\frac{1}{ημ^2θ} \cdot συνθ - 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{συν^2θ} \cdot (-ημθ) = \frac{3\sqrt{3} \cdot ημθ}{συν^2θ} - \frac{συνθ}{ημ^2θ} = \frac{3\sqrt{3} \cdot ημ^3θ - συν^3θ}{ημ^2θ \cdot συν^2θ}$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(θ) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \cdot ημ^3θ = συν^3θ \Leftrightarrow \frac{ημ^3θ}{συν^3θ} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{ημθ}{συνθ}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$εφθ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow θ = \frac{\pi}{6}$$

Αντίστοιχα, λύνουμε τις ανισώσεις:

$$f'(θ) < 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \cdot ημ^3θ - συν^3θ < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{ημθ}{συνθ}\right)^3 < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow εφθ < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 < θ < \frac{\pi}{6}$$

$$f'(θ) > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \cdot ημ^3θ - συν^3θ > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{ημθ}{συνθ}\right)^3 > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow εφθ > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < θ < \frac{\pi}{2}$$

Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας ακροτάτων:

$θ$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(θ)$	$-$		$+$
$f(θ)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $Δ_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ και άρα:

$$f(Δ_1) = \left[f\left(\frac{\pi}{6}\right), \lim_{θ \to 0^+} f(θ)\right) = [8, +\infty)$$

όπου περιέχεται το $y = 10$. Άρα, υπάρχει $\theta_1 \in \Delta_1$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει: $f(\theta_1) = 10$, και αφού $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 10$ είναι $\theta_1 < \frac{\pi}{6}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα:

$$f(\Delta_2) = \left[f\left(\frac{\pi}{6}\right), \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta)\right) = [8, +\infty)$$

όπου περιέχεται το $y = 10$. Επομένως, υπάρχει $\theta_2 \in \Delta_2$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει: $f(\theta_2) = 10$, και αφού $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 10$ είναι $\theta_2 > \frac{\pi}{6}$. Τελικά, η εξίσωση $f(\theta) = 10$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έστω θ_1 και θ_2 με $\theta_1 < \frac{\pi}{6} < \theta_2$.

Δ3. Έστω $g(x) = f(x) + f(a + \beta - x), x \in [a, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι:

$$g'(x) = f'(x) - f'(a + \beta - x)$$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η παράγωγος f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, και έχει την ιδιότητα «1 - 1».

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(\alpha + \beta - x) \Leftrightarrow x = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a + \beta - x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(a + \beta - x) \Leftrightarrow x < a + \beta - x \Leftrightarrow a < x < \frac{a+\beta}{2}$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(a + \beta - x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(a + \beta - x) \Leftrightarrow x > a + \beta - x \Leftrightarrow \frac{a+\beta}{2} < x < \beta$

Άρα:

x	α		$\frac{\alpha+\beta}{2}$		β
g'		$-$		$+$	
g	$T.M.$	$\searrow$		$\nearrow$	$T.M.$
			$O.E.$		

Είναι $g(a) = f(a) + f(\beta) = g(\beta)$, οπότε η g έχει ελάχιστη τιμή $m = g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και μέγιστη τιμή

$M = f(a) + f(\beta)$ και άρα για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει:

$$2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(\alpha) + f(\beta)$$

Δ4. Για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει:

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(a) + f(\beta)$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και η δεύτερη ισότητα για $x = a$ και $x = \beta$.

Άρα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx < \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+f(\alpha+\beta-x)]\, dx < \int_{\alpha}^{\beta} [f(\alpha)+f(\beta)]\, dx \Leftrightarrow$$

$$(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx < (\beta-\alpha)\cdot\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

χρησιμοποιώντας ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(u)\, du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

κάνοντας την αντικατάσταση $\alpha+\beta-x=u$ από όπου έχουμε $-dx=du$. Για τα άκρα ολοκλήρωσης θέτοντας $x=\alpha$ προκύπει $u=\beta$ και θέτονας $x=\beta$ παίρνουμε: $u=\alpha$.