ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Προτεινόμενα Θέματα

Μαθηματικά – Γ΄ Λυκείου

2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ενός σημείου του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν ισχύει $f'(x) > 0$, στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2.

α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

β) Ποια σημεία μιας συνάρτησης f λέγονται κρίσιμα σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

Μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ή $+\infty$.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ του διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοικτό διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f δεν είναι συνάρτηση "$1-1$".

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και για κάποιο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

Β1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Β2. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και έχει αντίστροφη την:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right), \qquad \text{με } x \in (-3,2).$$

Μονάδες 6

Β3. Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1,2)$ και ισχύει $1 < f(x_0 + 2) < 2$.

Μονάδες 7

Β4. Η ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{5}{6}x + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & \text{αν } x < 0 \\ x - 2 + \dfrac{2}{x+1}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ3. Να εξετάσετε ποια από τα θεωρήματα: Ενδιαμέσων τιμών, Rolle και Fermat εφαρμόζονται στο διάστημα $[0,1]$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x$ είναι κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων: $g(x) = \ln(1-x)$ και $h(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$.

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χώρου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = -1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή για την οποία ισχύουν:

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + \frac{4}{3}$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο της $A\big(1, f(1)\big)$
- Η f παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα στα σημεία $B(0,1)$ και $\Gamma(2, -\frac{1}{3})$
- Η f παρουσιάζει καμπή μόνο στο σημείο $\Delta\big(1, f(1)\big)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τη μονοτονία.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία αρνητική και δύο θετικές ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_2} \frac{f(x-1) - 1}{f(x) \cdot \eta\mu f(x)}$

Μονάδες 6

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Ορισμός του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 141.

β) Σχόλιο του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 143.

Μονάδες 6

Α2. Απόδειξη του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 144

Μονάδες 6

Α3. Λάθος.

Σχόλιο του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 136, παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x) = x^3\ x \in \mathbb{R}$.

Α4. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ κι επειδή είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$, με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x-3}{e^x+1} = -3$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+3}{e^x+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2.$$

Άρα, $f(\mathbb{R}) = (-3,2)$.

B2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι συνάρτηση $1-1$ και επομένως η f είναι αντιστρέψιμη.
$y = f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$ και $-3 < y < 2$
$y = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \Leftrightarrow ye^x + y = 2e^x - 3 \Leftrightarrow (y-2)\cdot e^x = -y - 3 \Leftrightarrow e^x = \frac{-y-3}{y-2} \Leftrightarrow$
$e^x = \frac{y+3}{2-y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+3}{2-y}\right)$ με $-3 < y < 2$.
Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right), \text{ με } x \in (-3,2)$$

B3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = x + 2 \Leftrightarrow f(x+2) = x \Leftrightarrow f(x+2) - x = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+2) - x$ με $x \in [1,2]$.

- Η g είναι στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(1) = f(3) - 1 = \frac{2e^3-3}{e^3+1} - 1 = \frac{e^3-4}{e^3+1} > 0$
  $g(2) = f(4) - 2 = \frac{2e^4-3}{e^4+1} - 2 = \frac{-5}{e^4+1} < 0$

Οπότε $g(1)\cdot g(2) < 0$ και συνεπώς από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+2) - x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1,2)$.
Ισχύει: $f(x_0+2) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0+2) = x_0$. Άρα $1 < f(x_0+2) < 2$

B4. Ισχύει:
$(f^{-1})'(x) = \frac{5}{(x+3)\cdot(2-x)}$ για κάθε $x \in (-3,2)$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (-3,2)$, για το οποίο ισχύουν:

$$f^{-1}(x_1) = \frac{5}{6}x_1 + \ln\frac{3}{2}$$

και

$$(f^{-1})'(x_1) = \frac{5}{6}$$

$(f^{-1})'(x_1) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{(x_1+3)\cdot(2-x_1)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow (x_1+3)\cdot(2-x_1) = 6 \Leftrightarrow$
$x_1(x_1+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = -1$
κι επειδή $f^{-1}(0) = \ln\frac{3}{2}$, ενώ $f^{-1}(-1) = \ln\frac{2}{3}$ ισχύει $x_1 = 0$.
Πράγματι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ έχει εξίσωση:
$(\varepsilon): y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)\cdot x \Leftrightarrow y - \ln\frac{3}{2} = \frac{5}{6}x \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + \ln\frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}\;\underset{u\to1^+}{\overset{u=1-x}{=\!=}}\;\lim_{u\to1^+}\frac{\ln u}{1-u}\;\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}}\;-\lim_{u\to1^+}\frac{1}{u}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-2+\frac{2}{x+1}}{x}\;\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}}\;\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{2}{(x+1)^2}\right)=-1$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$ με $f'(0)=-1$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\frac{(1-x)'}{1-x}=\frac{-1}{1-x}<0$ για κάθε $x<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=1-\frac{2}{(x+1)^2}$ για κάθε $x>0$.

$f'(x)=0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\dfrac{2}{(x+1)^2}=1\Leftrightarrow(x+1)^2=2\Leftrightarrow x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}$

$f'(x)<0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}0<x<-1+\sqrt{2}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,-1+\sqrt{2}\right]$

$f'(x)>0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}x>-1+\sqrt{2}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-1+\sqrt{2},+\infty\right)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x=0$:
f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(-\infty,-1+\sqrt{2}\right]$
f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[-1+\sqrt{2},+\infty\right)$
Η f παρουσιάζει στο σημείο $x=-1+\sqrt{2}$ ελάχιστο, το $f\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}-3$.

x	$-\infty$	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$O.E.$	$\nearrow$

Γ3. Επειδή $f(0)=f(1)=0$ δεν εφαρμόζεται το Θ.Ε.Τ. στο $[0,1]$ κι επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=f(1)$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=\sqrt{2}-1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,1]$ και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό εφαρμόζεται το θεώρημα Fermat.

Γ4. Ισχύει $g'(x)=\frac{-1}{1-x}$, για κάθε $x<1$ και $h'(x)=1-\frac{2}{(x+1)^2}$, για κάθε $x\neq-1$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(-\infty,1)-\{-1\}$ για το οποίο ισχύει

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow\frac{1}{x_0-1}=1-\frac{2}{(x_0+1)^2}\Leftrightarrow x_0=0 \text{ ή } x_0=-\sqrt{5}$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(0, g(0))$ έχει εξίσωση:
$y - g(0) = g'(0) \cdot x \Leftrightarrow y = -x$
Η εφαπτομένη της C_h στο $B(0, h(0))$ έχει εξίσωση:
$y - h(0) = h'(0) \cdot x = y = -x$
Άρα, η ευθεία $y = -x$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_g και C_h.

Γ5. Για κάθε $-1 < x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow -1 - x > 1 \Leftrightarrow \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ και $f(x) = 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x + \frac{2}{x+1} - 2 = 0 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,0)$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε
$0 \leq x \leq 1$
$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} |f(x)| dx + \int_{0}^{1} |f(x)| dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx - \int_{0}^{1} f(x) dx$
$\int_{-1}^{0} \ln(1-x) dx - \int_{0}^{1} (x + \frac{2}{x+1} - 2) dx = \frac{1}{2}$ $\tau.\mu.$ αφού:
$\int_{-1}^{0} \ln(1-x) dx = -\int_{2}^{1} \ln u\, du = [u \ln u - u]_{1}^{2} = 2\ln 2 - 1$
Θέτουμε $u = 1 - x$ $du = (1-x)' = -dx$
Όταν $x = -1, u = 2$
Όταν $x = 0, u = 1$ και $\int_{0}^{1} \left(x + \frac{2}{x+1} - 2\right) dx = [\frac{x^2}{2} + 2\ln(x+1) - 2x]_{0}^{1} = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + \frac{4}{3}$ επιτρέπεται στη C_f στο $A(1, f(1))$ ισχύουν: $f(1) = \frac{1}{3}$ και $f'(1) = -1$. Η συνάρτηση f είναι παρ/μη στα σημεία $x = 0$ και $x = 2$ και παρουσιάζει ακρότατα μόνο στα σημεία αυτά. Από το Θ.Fermat ισχύουν: $f'(0) = 0, f(2) = 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0{,}2$. Ισχύουν: $f''(1) = 0$ $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή η f'' είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.
Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$: $f''(\xi_1) = f'(1) - f'(0) = -1 < 0$ οπότε ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και η $f' \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$
Η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$: $f''(\xi_2) = f'(2) - f'(1) = 1 > 0$ οπότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ και η $f' \uparrow$ στο $[1, +\infty)$
Για κάθε $x < 0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, οπότε η $f \uparrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$
Η f' είναι συνεχής στο $(0,2)$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ οπότε η f' διατηρεί πρόσημο στο $(0,2)$, οπότε η $f \downarrow$ στο $\Delta_2 = [0,2]$
Για κάθε $x > 2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, οπότε η $f \uparrow$ στο $\Delta_3 = [2, +\infty)$

Δ2. Για κάθε $x < 0$ ισχύουν:

Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x, 0)$: $f'(\xi) = \frac{f(0)-f(x)}{-x} = \frac{1-f(x)}{-x}$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[x, 0]$η εφαπτομένη της C_f στο M βρίσκεται πάνω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους M. Επομένως ισχύει:

$f(x) \leq f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$ για κάθε $x < 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}[f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)] = f'(\xi) \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ οπότε $f(\Delta_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, 1]$. Επειδή ο αριθμός μηδέν ανήκει στο $f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια (αφού $f \uparrow$ *στο* Δ_1) ρίζα $x_1 \in (-\infty, 0)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [0,2]$ οπότε $f(\Delta_2) = [f(2), f(0)] = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Επειδή ο αριθμός μηδέν ανήκει στο $f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια (αφού $f \downarrow$ στο Δ_2) ρίζα $x_2 \in (0,2)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [2, +\infty)$ οπότε $f(\Delta_3) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Επειδή ο αριθμός μηδέν ανήκει στο $f(\Delta_3)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια (αφού $f \uparrow$ στο Δ_3) ρίζα $x_3 \in (2, +\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες τις: $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0,2)$ και $x_3 \in (2, +\infty)$.

Δ4. Ισχύει: $1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x_2 - 1 < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(x_2 - 1) < f(0) \Leftrightarrow$
$\frac{1}{3} < f(x_2 - 1) < 1 \Leftrightarrow f(x_2 - 1) - 1 < 0$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_2} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \xlongequal[u \to \lim\limits_{x\to x_2} f(x) = f(x_2) = 0]{u = f(x)} \lim\limits_{u\to0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 > 0$

οπότε ισχύει $\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} > 0$ κοντά στο x_2.

$\lim\limits_{x\to x_2} \frac{f(x-1)-1}{f(x)\cdot\eta\mu f(x)} = \lim\limits_{x\to x_2} \frac{\frac{f(x-1)-1}{f^2(x)}}{\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}} = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to x_2} f^2(x) = 0$, $f^2(x) > 0$ κοντά στο x_2

οπότε $\lim\limits_{x\to x_2} \frac{1}{f^2(x)} = +\infty$