

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

A2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 4 (1+3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) , με εξαίρεση ίσως ενός σημείου του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

β) Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δεν έχει σημεία καμπής σε ένα διάστημα Δ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

γ) Η γραφική παράσταση κάθε συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.

δ) Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^3 f(x)dx$$

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2 - x) \cdot e^x + \frac{x^2}{2} - x$ με $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας ακριβώς $\xi \in (0,1)$: $f''(\xi) = 0$, στον οποίο η f παρουσιάζει καμπή.

Μονάδες 7

B4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) : $y = (1 - e) \cdot x + e - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f' .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$, με $x > 0$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(f(x)-4x+1)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$.

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e f(x)dx$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$(f(x) \cdot \ln x + e^x) \cdot (f(x) \cdot \ln x - e^x) = 0, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } f(e) = e^e.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in (1,2)$ το $f(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x}{e^x - x_0 \cdot e^{x_0} \ln x}$.

Μονάδες 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x \cdot f'(x) \cdot \ln x$ με $x > 1$

Δ4. Για κάθε $\alpha > 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^\alpha h(x)dx = (\alpha - 1)e^\alpha - e^2.$$

Μονάδες 5

Δ5. Αν $E(\alpha) = \int_2^\alpha h(x)dx$ τότε να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [E(\alpha) + \eta \mu E(\alpha)]$.

Μονάδες 5

ΜΕΘΟΔΙΚΟ



Υπολογισμός Μορίων Πανελλαδικών 2025

Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή για να **υπολογίσετε Μόρια**
για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα / Σχολή!

Υπολογίστε Μόρια, δείτε τα **Τμήματα Επιτυχίας** (με τις περσινές βάσεις),
τις **Ελάχιστες Βάσεις Εισαγωγής** για κάθε Ειδικό Μάθημα
και για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα

μέσα από την **ιστοσελίδα του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ**
ή την **Android Εφαρμογή: [mobile app](#)**

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 217

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 185

A3. α. Ψ («Ψευδής»)

β. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, τότε για $x_0 = 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, ενώ το

όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει,

καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

A4. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x + x - 1 = e^x(1-x) - (1-x) = (1-x)(e^x - 1).$$

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δίνει λύσεις: $x = 0$, $x = 1$.

Στη συνέχεια, λύνουμε τις ανισώσεις:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$e^x - 1$	-	0	+	+
$f'(x)$	-	+	-	-
$f(x)$		↘ T.E.	↗ T.M.	↘

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο σημείο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 2$.

Η f παρουσιάζει στο σημείο $x = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = e - \frac{1}{2}$.

B2. Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 είναι:

$$f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [2, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2-x) \cdot e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) = +\infty,$$

ενώ αντίστοιχα, αφού είναι αύξουσα στο Δ_2 έχουμε: $f(\Delta_2) = [f(0), f(1)] = \left[2, e - \frac{1}{2}\right]$

Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_3 οπότε:

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(-\infty, e - \frac{1}{2}\right],$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(2 - x + \frac{x^2}{2e^x} - \frac{x}{e^x} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \mathbb{R}$.

Επειδή $0 \notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$.

Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι $0 \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2 = [0, 1]$.

Τέλος, επειδή $0 \in f(\Delta_3)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_3) ρίζα την $x = 2$, εφόσον $f(2) = 0$.

B3. Η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, ενώ η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f''(x) = 1 - xe^x$ με $f'(0) = f'(1) = 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε: $f''(\xi) = 0$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη με: $f'''(x) = -e^x(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση: $f'''(x) = 0$ έχει λύση $x = -1$.

Λύνουμε τις ανισώσεις:

$$f'''(x) < 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$f'''(x) > 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'''(x)$		+	-
$f''(x)$		↗	↘

Οπότε από τον πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων προκύπτει ότι η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$.

$$\text{Αντίστοιχα προκύπτει: } f''((-\infty, -1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f''(x), f''(-1) \right] = \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right],$$

άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \leq -1$.

Για κάθε $-1 \leq x < \xi \stackrel{f'' \downarrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(\xi) \Leftrightarrow f''(x) > 0$. Οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, \xi]$.

Για κάθε $x > \xi \stackrel{f'' \downarrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(\xi) \Leftrightarrow f''(x) < 0$.

Άρα, η f είναι κοίλη στο $[\xi, +\infty)$ και επειδή ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x = \xi$, το σημείο $K(\xi, f(\xi))$ είναι μοναδικό σημείο καμπής της C_f .

B4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύουν:

$$\begin{cases} A(x_0, f'(x_0)) \in (\varepsilon) \\ \text{και } f''(x_0) = 1 - e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = (1 - e)x_0 + e - 1 \\ \text{και } 1 - x_0 e^{x_0} = 1 - e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x_0)(e^{x_0} - 1) = (1 - e)x_0 + e - 1 \\ \text{και } x_0 e^{x_0} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} - 1 - x_0 e^{x_0} + x_0 = x_0 - e x_0 + e - 1 \\ \text{και } x_0 e^{x_0} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0} - e = -e x_0 + e \Leftrightarrow e^{x_0} + e x_0 - 2e = 0, (\varepsilon).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x + ex - 2e$, $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $h(1) = 0$ και επειδή $h'(x) = e^x + e > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της h . Η εξίσωση (ε) γράφεται ισοδύναμα:

$$h(x_0) = h(1) \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} x_0 = 1.$$

Πράγματι, η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση:

$$y - f'(1) = f''(1)(x - 1) \text{ με } f'(1) = 0 \text{ και } f''(1) = 1 - e.$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι: $y = (1 - e)x + e - 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι γνησίως αύξουσα με:

$$f'(x) = 2x(3 - 2\ln x) - x^2 \frac{2}{x} = 2x(3 - 2\ln x - 1) = 4x(1 - \ln x) \text{ με } x > 0.$$

Είναι για $x > 0$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ και αντίστοιχα για $x > 0$ είναι:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e, \text{ επομένως η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_2 = [e, +\infty).$$

Συνεπώς, η f παρουσιάζει στη θέση $x = e$ μέγιστο το $f(e) = e^2$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, e]$,

$$\text{οπότε } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} f(x), f(e) \right] = (0, e^2],$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} [x^2(3 - 2\ln x)] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3 - 2\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2}{\frac{-2}{x^3}} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$,

$$\text{οπότε } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = (-\infty, e^2].$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, e^2]$.

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = 4(1 - \ln x) - \frac{4x}{x} = -4\ln x$, για κάθε $x > 0$.

Είναι: $f''(x) > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(0, 1]$,

και $f''(x) < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ οπότε η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = 1$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό, το $A(1, 3)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ3. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της A έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 1$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,1]$ η εφαπτομένη (ε) βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής A . Επομένως ισχύει:

$$f(x) > 4x - 1 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{(x-1)(f(x)-4x+1)} = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3.$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$ η εφαπτομένη (ε) βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής A .

$$\text{Επομένως ισχύει: } f(x) < 4x - 1 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{(x-1)(f(x)-4x+1)} = -\infty.$$

$$\text{Τελικά: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(f(x)-4x+1)} = -\infty.$$

Γ4. Για κάθε $x > 0$ σε μία περιοχή του $+\infty$ ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο $[x, 2x]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

$$\text{Ισχύει: } x < \xi < 2x \xrightarrow{f' \downarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(2x) - f(x)}{x} < f'(x) \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [4x(1 - \ln x)] = -\infty \text{ ισχύει } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = -\infty$$

Γ5. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e x^2(3 - 2\ln x) dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' (3 - 2\ln x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}(3 - 2\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (3 - 2\ln x)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} - 1 + \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{e^3}{3} - 1 + \frac{2}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - 1 + \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{5e^3 - 11}{9} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x > 1$ ισχύει: $(f(x) \cdot \ln x + e^x) \cdot (f(x) \cdot \ln x - e^x) = 0$

$$\text{Άρα: } (f(x) \cdot \ln x)^2 - (e^x)^2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot \ln x)^2 = (e^x)^2 \Leftrightarrow |f(x) \cdot \ln x| = e^x.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(x) = f(x) \cdot \ln x$ με $x > 1$.

Τότε ισχύει: $|g(x)| = e^x > 0$ για κάθε $x > 1$, οπότε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ και αφού η g είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $A = (1, +\infty)$ και επειδή $g(e) = e^e > 0$ ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

$$\text{Επομένως είναι: } g(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) \cdot \ln x = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \text{ με } x > 1.$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \ln x - \frac{e^x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{e^x \cdot (\ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

$$\text{Θέτουμε } \varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x} \text{ με } x \in [1, +\infty).$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η φ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και $\varphi(1) \cdot \varphi(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$, γιατί $\frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1 - 2 \ln 2}{2} = \frac{\ln e - \ln 4}{2} < 0$, αφού $e < 4$.

Οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$: $\varphi(x_0) = 0$ και επειδή ισχύει $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$ και συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ η x_0 είναι η μοναδική ρίζα της φ .

Για κάθε $1 < x < x_0 \stackrel{\varphi \uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (1, x_0]$.

Για κάθε $x > x_0 \stackrel{\varphi \uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 παρουσιάζει στο σημείο αυτό ελάχιστο, το $f(x_0) = \frac{e^{x_0}}{\ln x_0}$.

Ισχύει: $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$. Επομένως ισχύει $f(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0}$.

Δ3. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x}{e^x - x_0 e^{x_0} \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{e^x}{\ln x} - x_0 e^{x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ και επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , ισχύει: $f(x) > f(x_0)$

κοντά στο x_0 , δηλαδή ισχύει: $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 και συνεπώς: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$.

Δ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \int_2^a h(x) dx &= \int_2^a (f(x) + x f'(x) \ln x) dx = \int_2^a f(x) dx + \int_2^a f'(x) \cdot (x \ln x) dx \\ &= \int_2^a f(x) dx + [f(x) \cdot x \ln x]_2^a - \int_2^a f(x) \cdot (x \ln x)' dx \\ &= \int_2^a f(x) dx + \left[\frac{e^x}{\ln x} \cdot x \ln x \right]_2^a - \int_2^a f(x) \cdot (\ln x + 1) dx \\ &= \int_2^a f(x) dx + [x e^x]_2^a - \int_2^a f(x) \cdot \ln x dx - \int_2^a f(x) dx = a \cdot e^a - 2e^2 - \int_2^a e^x dx \\ &= a e^a - 2e^2 - e^a + e^2 = (a - 1)e^a - e^2 \end{aligned}$$

Δ5. Για να υπολογίσουμε το όριο: $\lim_{a \rightarrow +\infty} [E(a) + \eta \mu E(a)]$, θέτουμε: $u = E(a)$.

Τότε $\lim_{a \rightarrow +\infty} u = \lim_{a \rightarrow +\infty} E(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} [(a - 1)e^a - e^2] = +\infty$ οπότε:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} [E(a) + \eta \mu E(a)] = \lim_{u \rightarrow +\infty} [u + \eta \mu u] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[u \left(1 + \frac{\eta \mu u}{u} \right) \right] = +\infty,$$

αφού για κάθε $u > 0$ ισχύει: $\left| \frac{\eta \mu u}{u} \right| = \frac{|\eta \mu u|}{u} \leq \frac{1}{u}$.

Επομένως, ισχύει: $\frac{-1}{u} \leq \frac{\eta \mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$ για κάθε $u > 0$.

Επειδή $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-1}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0$.

Ευχόμαστε καλή δύναμη & επιτυχία!