ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:17

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: *16 / 06/ 2021*

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ***Μαθηματικά ΟΠ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ.135

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ.51

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ.23

Α4. **α) Σ** **β) Λ** **γ) Σ** **δ) Σ** **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $u = x+1$, $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ άρα $x = u-1$,

$f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}, u \in \mathbb{R}$ επομένως $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

Β2. Η f συνεχής ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \left(x \cdot e^{1-x}\right)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x) \cdot e^{1-x}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} < 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f εμφανίζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		-
f	$\nearrow$	ΟΜ f(1)=1	$\searrow$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων

$$f''(x)=\left(e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}\right)'=e^{1-x}(1-x)'-\left[x'e^{1-x}+xe^{1-x}(1-x)'\right]=$$

$$=-e^{1-x}-\left(e^{1-x}-xe^{1-x}\right)=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$$

$$f''(x)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

$$f''(x)<0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2<0\Leftrightarrow x<2$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,2]$.

Η f εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_1=2$ το σημείο καμπής είναι το $\left(2,2e^{-1}\right)$.

$f(x)=x\cdot e^{1-x}$ με $A_f=\mathbb{R}$.

Η f συνεχής $A_f=\mathbb{R}$ επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

Αφού $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ τότε: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

Επομένως η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x}=+\infty$$

Επομένως η f δεν έχει πλάγια η οριζόντια ασύμπτωτη καθώς το $x\to-\infty$

B4.i) $\Delta_1=(-\infty,1]$ f $\nearrow$

$\Delta_2=(1,+\infty)$ f $\searrow$

f συνεχής στο $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2=\mathbb{R}$

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e\cdot\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$$

($\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)=(0,1)$

Το όριο έχει δειχθεί σε προηγούμενο ερώτημα.

Άρα $f(\Delta)=(-\infty,1]\cup(0,1)=(-\infty,1]$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f΄		+		-	
f		$\nearrow$	ΟΜ f(1)=1	$\searrow$	

Από το σύνολο τιμών της f πρκύπτει ότι:

Αν $\lambda\le0$ η (ε) :f(x)=λ έχει μία ρίζα

Αν $0<\lambda<1$ η (ε) :f(x)=λ έχει δυο ρίζες

Αν $\lambda=1$ η (ε) :f(x)=λ έχει μια ρίζα την χ=1

Αν $\lambda>1$ η (ε) :f(x)=λ έχει είναι αδύνατη

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1 & , x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \alpha<-3$$

$f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sigma\upsilon\nu x\right)=1$$

- Η f συνεχής στο $x_0=0$
- Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και συνεχής στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Άρα συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ.2.

i) Η f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

$f(0)=1$

Συνεπώς δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii) Αν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ τότε $f'(x) = -ημx$

Έστω $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ\ , κ \in \mathbb{Z}$

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < κπ < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < κ < \frac{3}{2}$ άρα $κ = 1$

Για $κ = 1$: $x = 1 \cdot \pi = \pi$

Άρα υπάρχει μοναδικό $ξ = \pi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(ξ) = 0$

Γ.3. Έστω σημείο $A(x, f(x))$ με $x < 0$ τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$

Για $x < 0$ η $f'(x) = 3αx^2 - 6x - 1$

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3αx^2 - 6x - 1 = 0$

$Δ = (-6)^2 - 4 \cdot (3α) \cdot (-1) = 36 + 12α$

Όμως $α < -3 \Leftrightarrow 12α < -36 \Leftrightarrow 12 + 36 < 0 \Leftrightarrow Δ < 0$

Άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x < 0$, άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της C_f να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ.4. Για $x < 0$: $f'(x) = 3αx^2 - 6x - 1 < 0$ διότι $Δ < 0$ και $3α < 0$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$: $f'(x) = -ημx$

- Για $x \in (0, \pi)$ έχουμε $ημx > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $ημx < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$3\alpha x^2-6x-1$	$-$			
$-\eta\mu x$		$-$	0	$+$
f'	$-$	‖ $-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$
			Τ.ΕΛ.	Τ.ΜΕΓ.

Η f συνεχής στο A_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\alpha x^3\right) = +\infty \text{ (διότι } \alpha<0\text{)}$$

$$f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Για το σύνολο τιμών της f:

$$f\left((-\infty,\pi]\right) \overset{\searrow}{=} \left[f(\pi), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$$

$$f\left(\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right) \overset{\nearrow}{=} \left(f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = (-1,0]$$

Άρα $f(A) = [-1,+\infty)$ συνεπώς $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in A_f$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\ln x - 1 = 0$

$t(x) = x\ln x - 1,\ x \in [1,e]$

- t συνεχής στο $[1,e]$
- $\left.\begin{array}{l} t(1) = -1 < 0 \\ t(e) = e\ln e - 1 = e - 1 \end{array}\right\} t(1)\cdot t(e) < 0$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0) = 0$

$$t'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in (1,e)$$

Άρα $t \nearrow$ στο $(1,e)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$

Δ.2. $f'(x)=\ln x_0-\dfrac{1}{x}\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{=}\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-x_0}{x_0\cdot x}$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{x-x_0}{x_0\cdot x}\geq 0\overset{x_0\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x\geq x_0$

x	0	x_0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ.	$\nearrow$

Η $f(x)$ παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο το

$$\begin{aligned}f(x_0)&=(\ln x_0)\cdot(x_0+1)-\ln x_0-1=\\&=x_0\cdot\ln x_0+\ln x_0-\ln x_0-1=\\&=x_0\cdot\ln x_0-1=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-1=1-1=0\end{aligned}$$

Δ.3.

- Για $x>0$

$$\begin{aligned}g(x)=h(x)&\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln\left(x\cdot e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x-x\ln e=(x+1)\ln x_0-(x+1)\ln e\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-(x+1)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x\cancel{-x}=(x+1)\ln x_0\cancel{-x}-1\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow f(x)=0\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα $Δ_2$ η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο

Άρα $f(x)\geq f(x_0)=0$ και το "$=$" ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x=x_0$

Άρα $g(x_0)=h(x_0)$

$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\frac{x_0}{e}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-\ln e)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-1)$$

Θα δείξουμε ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1}{x_0}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\overset{x_0\neq 1}{\Leftrightarrow} e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}=\frac{{x_0}^{x_0}}{e^{x_0}}\cdot\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {x_0}^{x_0}=e\Leftrightarrow \ln {x_0}^{x_0}=\ln e\Leftrightarrow x_0\ln x_0=1\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$$

Ισχύει από το Δ_1

- Για $x\leq 0$ η εξίσωση $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη, αφού

  $g(x)=x\cdot e^{-x}\leq 0$ και $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$ αφού $x_0\in(1,e)$

Δ.4. $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)>\varphi(x)$

$A(x,f(x))\quad B(x,\varphi(x))\quad x>0$

$$(AB)=d(A,B)=\sqrt{(x-x)^2+(\varphi(x)-f(x))^2}=\sqrt{(\varphi(x)-f(x))^2}=$$

$$=|\varphi(x)-f(x)|=f(x)-\varphi(x)\,,\ \text{αφού } f(x)>\varphi(x)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$S(t)=f(x)-\varphi(x),\ x\in(0,+\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

Η $S(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

$S(x) \geq S(x_0)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

αφού παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$.

Από το Θ.Fermat: $S'(x_0)=0$

$S'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$

$S'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0) \overset{f'(x_0)=0}{\underset{\Delta_2}{\Leftrightarrow}} \varphi'(x_0)=0$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.

2) Αν η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.

Σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ